



Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”
Dipartimento di Matematica

Dai Ponti di Königsberg al Grafo di Progetto

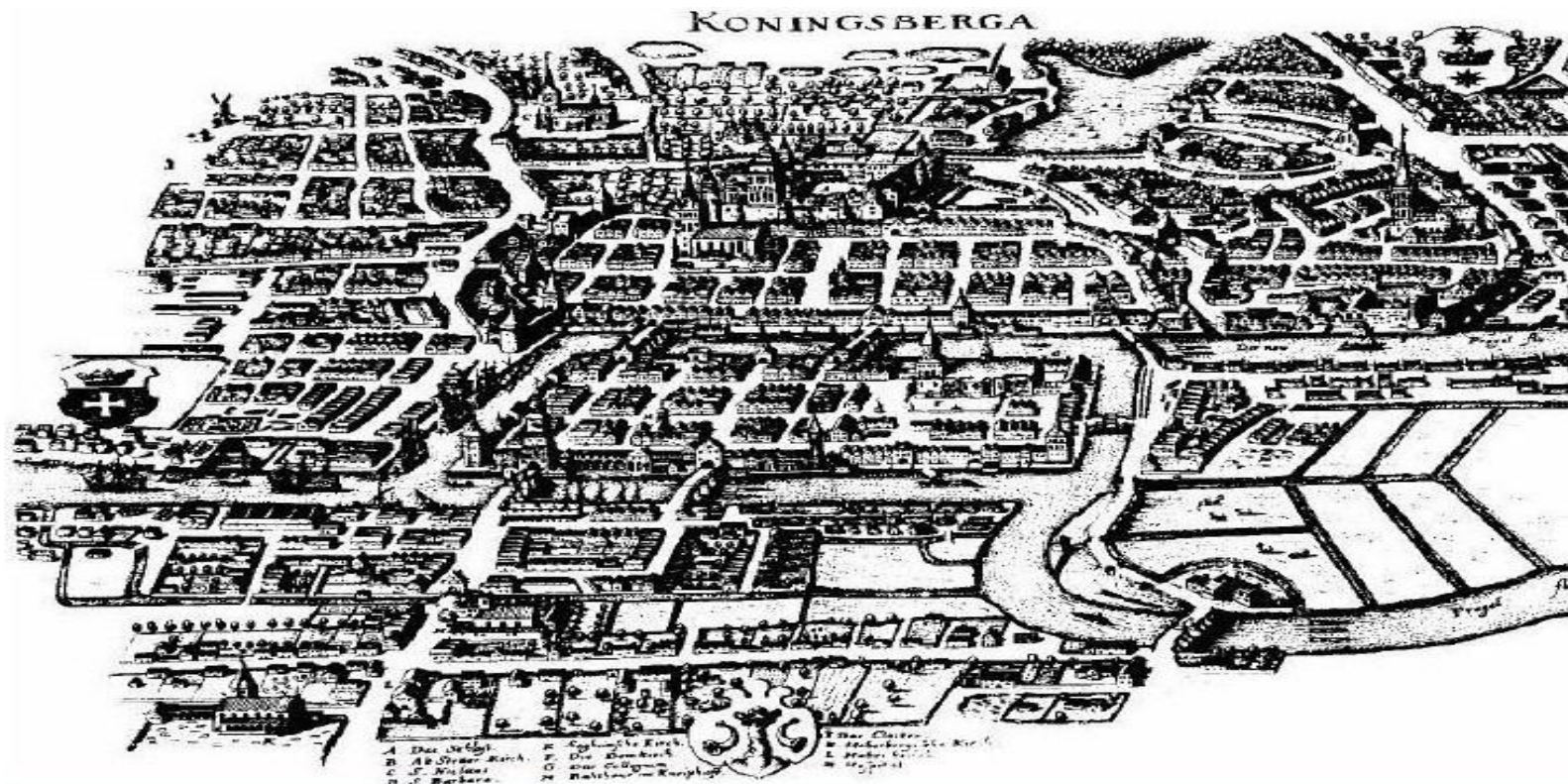
Percorso didattico

Universita' di Roma- Tor Vergata

Responsabile scientifico: Francesca Tovenà

Gruppo di lavoro: Maria Antonietta Restaino, Paola Faggiani , Tamara Battisti

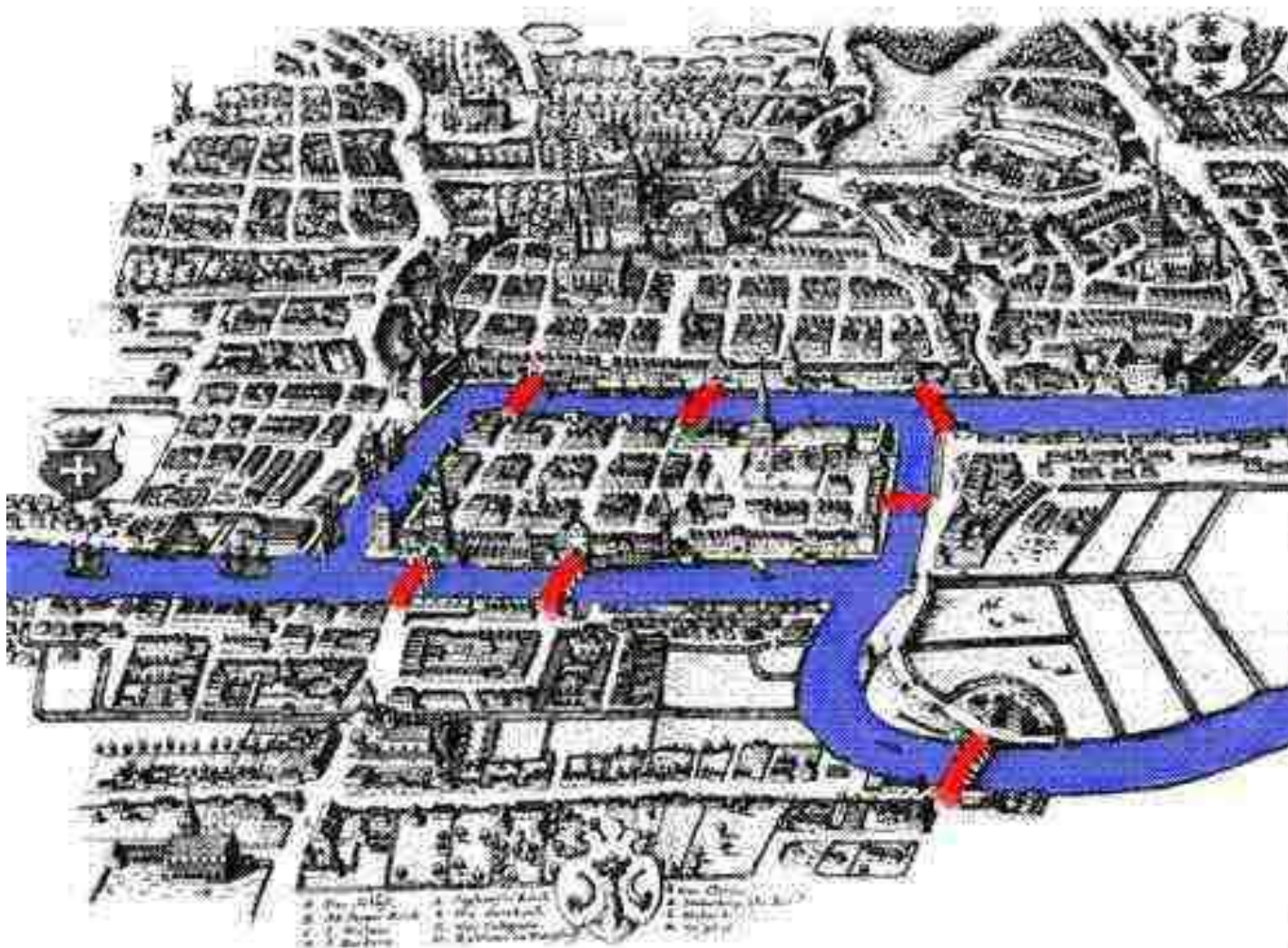
Königsberg (sec. XVIII)



Königsberg è una città che nel XVIII secolo faceva parte della Prussia orientale, nota perché vi era nato il filosofo Immanuel Kant.

L'illustrazione è la mappa della città, come doveva apparire all'epoca di Eulero (1707, Basilea – 1783, San Pietroburgo)

I 7 ponti di Königsberg

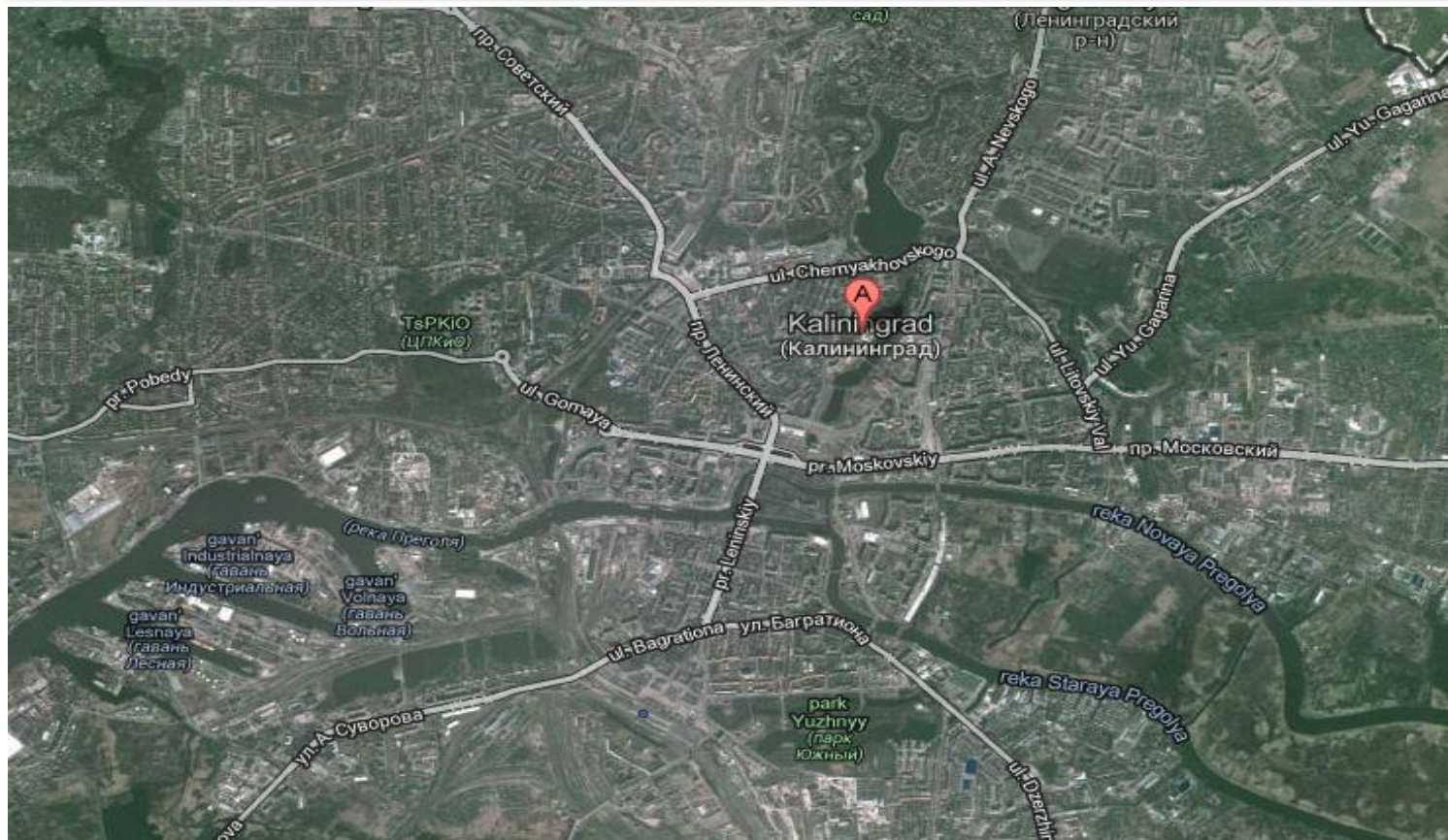


Il problema dei 7 ponti di Königsberg

- L'enunciato del problema è il seguente: è possibile per un abitante di Königsberg uscire di casa, visitare tutti i quartieri della città e tornare a casa, avendo attraversato una sola volta ognuno dei 7 ponti?
- Si tratta di un problema nato come un gioco, una sorta di sfida che gli abitanti di Königsberg sembra ponessero agli stranieri di passaggio...
- Un modo empirico di affrontare questo problema potrebbe essere quello di provare delle passeggiate.

...Qualche abitante di Königsberg avrà quasi certamente fatto qualche tentativo, ma senza riuscire ad attraversare ciascun ponte una sola volta soltanto...

Kaliningrad (GMaps) / zoom in

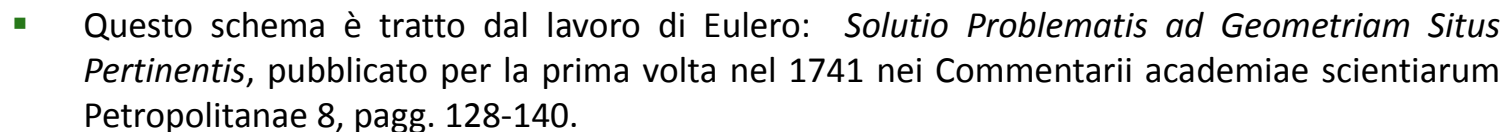


Königsberg oggi si trova in Russia, non distante dal Baltico e si chiama Kaliningrad

Kaliningrad

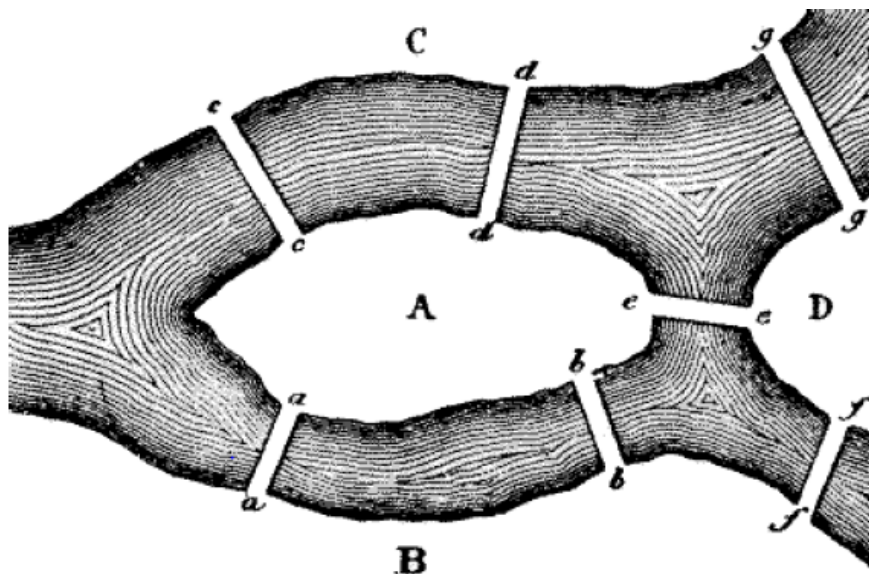
Non ritroviamo tutti i ponti presenti nel XVIII secolo, in quanto è stata ricostruita, dopo la distruzione che ha subito nella Seconda Guerra Mondiale.





L'analisi del problema

Potremmo
iniziare col fare
delle prove
empiriche, da
cui far scaturire
qualche
osservazione.....



Andando più in profondità, cosa significa per ciascuna regione avere un numero pari o un numero dispari di collegamenti?

Il procedimento di Eulero

- Eulero scrive che si potrebbe cominciare con l'elencare tutte le passeggiate possibili: dall'elenco si vedrebbe qual è, o quali sono, quella che risolve, o risolvono, il problema oppure che tale passeggiata non esiste. Ma subito esclude quel metodo, per due motivi:
 1. *I percorsi possibili sono un numero enorme, e la loro elencazione creerebbe difficoltà che nulla hanno a che vedere con la natura del problema.*
 2. *Così facendo, si risolverebbe sì il problema specifico, che resterebbe però aperto per altre disposizioni delle regioni, per il loro numero e per il numero dei ponti.*

I grafi

Eulero inventa un altro metodo, che si basa essenzialmente su un modo idoneo di rappresentare i percorsi.

Comincia con l'indicare con A, B, C e D le quattro regioni.

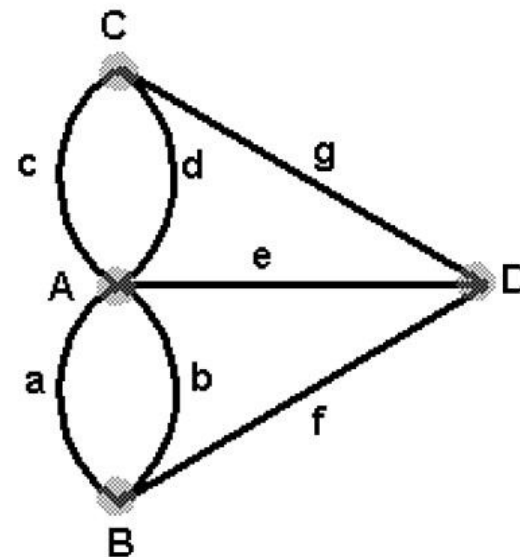
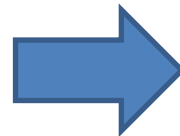
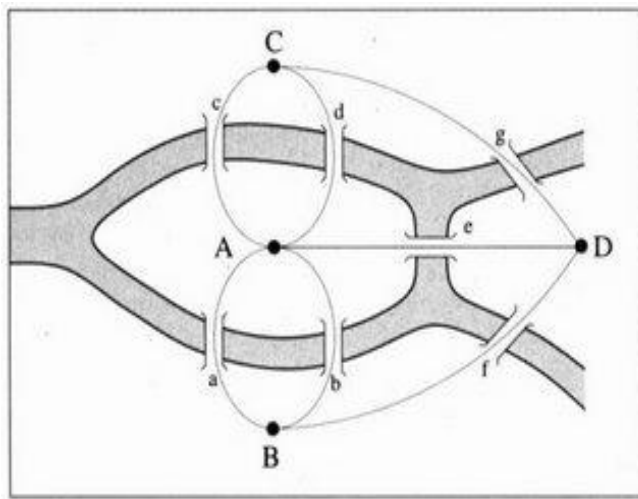
Già che c'è, indica con a, b, c, d, e, f, g i sette ponti.

Dal procedimento di Eulero alla Teoria dei Grafi

A questo punto come individuare uno schema essenziale del problema dei 7 ponti di Königsberg, e di tutti i problemi che gli somigliano, cioè che possono essere schematizzati allo stesso modo?

Uno schema essenziale

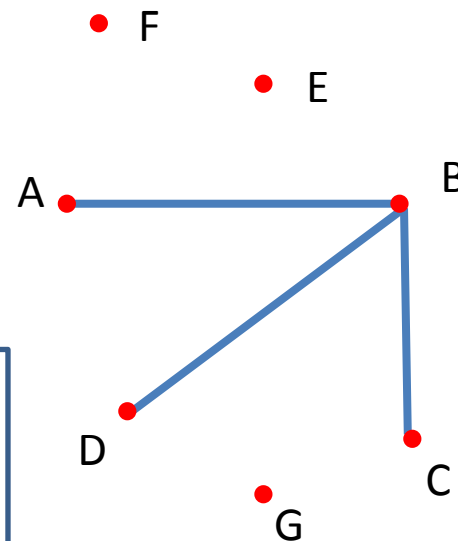
Il problema può essere schematizzato in questo modo:



Cos'è un grafo

Formuliamo le definizioni di base della teoria dei grafi

- Consideriamo un insieme di punti;
- Li nominiamo, cioè assegniamo a ciascun punto una etichetta (label);
- Stabiliamo delle connessioni tra alcuni di questi punti.

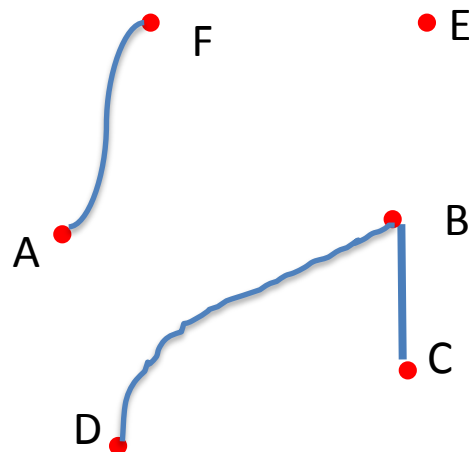


Un **grafo** è una rappresentazione di punti (detti nodi o vertici) e linee detti archi, che congiungono alcuni nodi.

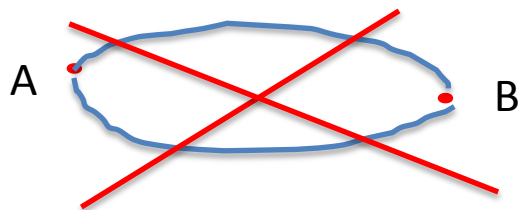
E' formato quindi da due insiemi: un insieme di punti e un insieme di archi

Cos'è un grafo

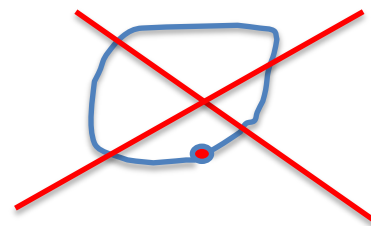
- Un **arco** è una linea che congiunge due vertici tra loro distinti.
- Non è necessario disegnarli come segmenti



- due vertici possono essere collegati da un solo arco

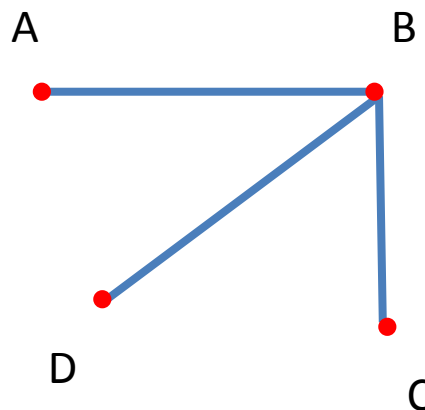


- NON consideriamo archi che cominciano e finiscono nello stesso punto



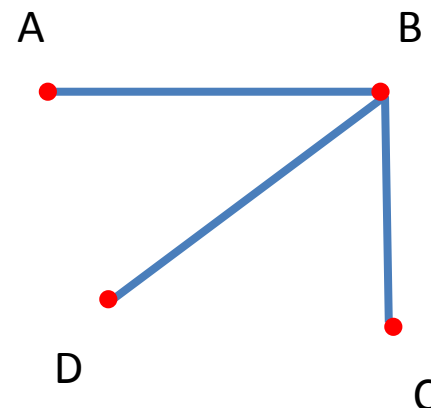
Grafi equivalenti

- Possiamo farci alcune domande, del tipo:
 - Quale sarebbe il significato del grafo che abbiamo disegnato nel caso in cui i nodi rappresentino regioni e gli archi ponti, come nel problema di Königsberg? Già che ci siamo, possiamo anche domandarci se in questo caso il cammino cercato per la città di Königsberg sarebbe possibile...
 - Se i nodi rappresentassero invece 4 città e gli archi i collegamenti aerei tra esse, quale sarebbe il significato di questo grafo?
 - Proviamo ad attribuire altri significati al grafo, ai suoi nodi e ai suoi archi.



Rappresentazione di un grafo

- In quanti altri modi possiamo rappresentare/descrivere un grafo e quindi il problema che il grafo rappresenta?
- Potremmo dire che il grafo è composto da un insieme di nodi e un insieme di archi:
 - I nodi = A, B, C, D e Gli archi = AB, BD, BC (in questo modo il grafo è completamente definito)
 - Un percorso da A a C potrebbe essere rappresentato, alla maniera di Eulero, dalla parola-percorso ABC.
- Potremmo anche utilizzare una notazione binaria facendo uso di una matrice (questa rappresentazione presenta il vantaggio di utilizzare un linguaggio comprensibile da un computer)

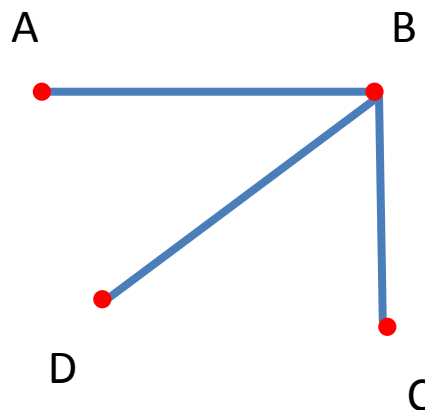


Grafi connessi

- In questo grafo è possibile raggiungere un nodo qualsiasi a partire da un altro nodo del grafo?

Si, anche se non tutti i nodi sono direttamente collegati tra loro.

Ad esempio, per andare da D a C dovremo passare per B e quindi percorrere gli archi DB e BC (parola-percorso DBC).



Un grafo è **connesso** quando ciascun nodo del grafo è collegato ad ogni altro nodo mediante una successione di archi.

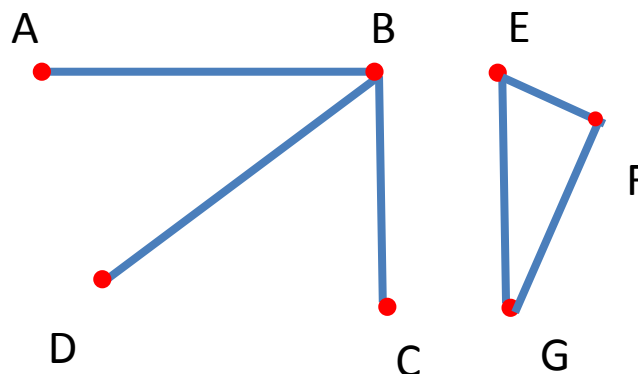
Grafi non connessi

- Proviamo invece a fare un esempio di una situazione in cui il grafo che la rappresenta **non è connesso**?

Nell'esempio riportato, supponiamo che ogni nodo rappresenti una persona e l'arco che li congiunge il fatto che si conoscono.

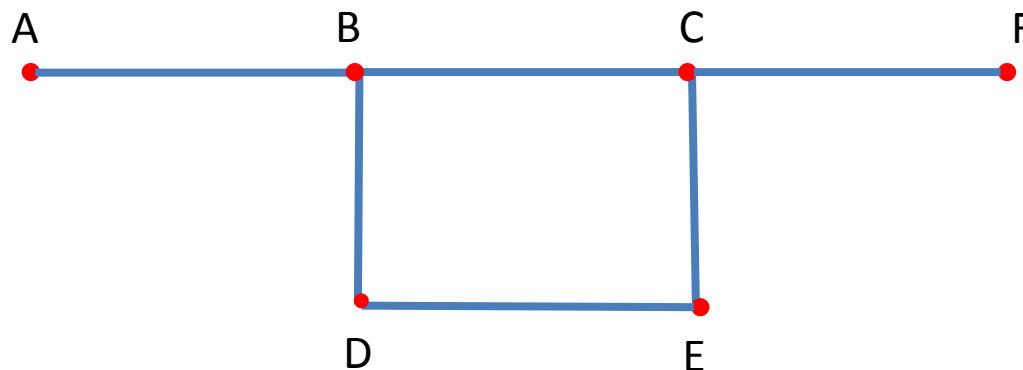
Se io sono A, non conosco direttamente D, ma potrò chiedere a B di presentarmelo.

Invece non ho modo, nell'attuale situazione, di raggiungere E, F o G.



Se un grafo **non è connesso** non si possono raggiungere tutti i nodi con archi che partono da uno dei suoi nodi.

Percorsi (Path)



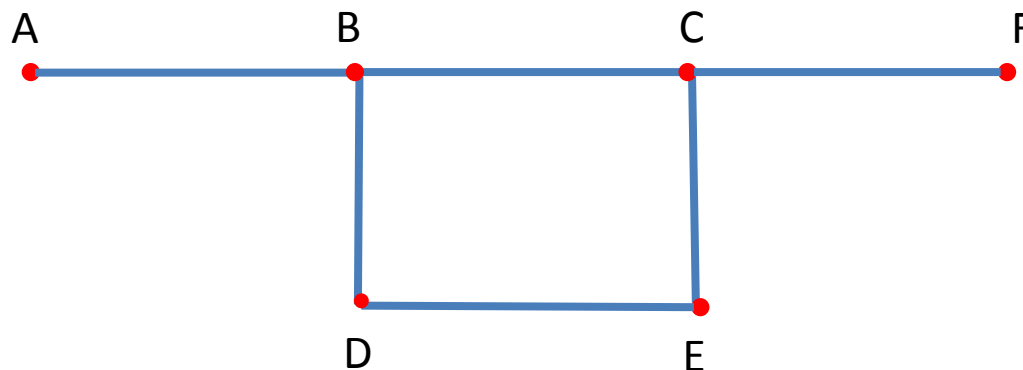
Consideriamo un altro grafo, la domanda che adesso ci facciamo è: in che modo posso andare da A ad F?

Potrei scegliere ad esempio il percorso (path) ABCF oppure ad esempio ABDECF. Quale sarebbe il percorso più breve tra questi due?

A parità di altre condizioni, possiamo pensare di contare gli archi.

La **lunghezza di un percorso** su un grafo è data dal numero di archi che costituiscono il percorso

Cicli



- Vedete altri percorsi possibili oltre a ABCF e ABDECF?

Un grafo ha un **ciclo** se partendo da un nodo vi si ritorna attraverso un percorso chiuso.

Con la definizione di ciclo anche noi siamo tornati ad Eulero e al problema dei 7 ponti di Königsberg.

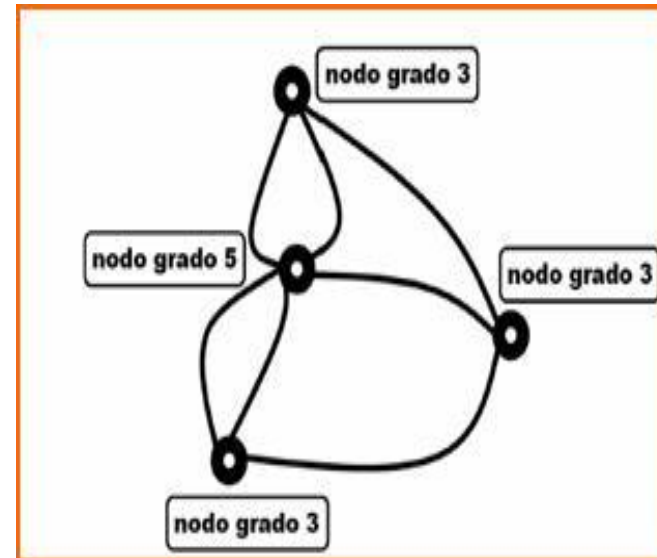
Tributo ad Eulero nelle definizioni della Teoria dei grafi

- **Cammino Euleriano (Simple Path):** è un cammino su un generico grafo che passa per ogni arco una ed una sola volta.
- **Ciclo Euleriano:** è un cammino Euleriano che torna al punto di partenza.
- **Grafo Euleriano:** è un grafo che ammette almeno un ciclo Euleriano.



Ordine dei nodi

- Torniamo al grafo associato al problema dei 7 ponti di Königsberg. Lo riconoscete?
- Il numero di archi che escono da un nodo si chiama **ordine del nodo**.
- Quando si dice nodo pari o nodo dispari si intende rispettivamente nodo di **ordine pari** o **nodo di ordine dispari**.



- **Un cammino Euleriano** (cammino su un grafo che passa per ogni arco una e una sola volta) è possibile solo in grafi connessi dove il grado dei nodi è pari o al più è dispari solo per due nodi.
- **Un ciclo Euleriano** (cioè un cammino Euleriano che torna al punto di partenza) è possibile solo in grafi connessi che abbiano tutti i nodi di grado pari.

Scrivi Eulero...

Dato dunque un qualunque caso, si può immediatamente e facilissimamente riconoscere se la passeggiata, alle solite condizioni, è possibile o no, in forza della seguente regola.

- *Se sono più di due le regioni alle quali conducono un numero dispari di ponti, allora si può affermare con certezza che la passeggiata è impossibile.*
- *Se sono solo due le regioni alle quale conducono un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, a condizione che si parta da una di esse. (e, potremmo aggiungere, si finisca nell'altra)*
- *Se infine a nessuna regione giunge un numero dispari di ponti, allora la passeggiata è possibile, qualunque sia la regione dalla quale si parte.*

E questa regola è del tutto soddisfacente, qualunque sia il problema posto.

Una facile regola

Va bene, possiamo facilmente stabilire se la passeggiata è possibile o no. Ma, una volta stabilito che c'è, come facciamo a trovarla?

Scrive Eulero a conclusione del suo lavoro:

Una volta accertato che tale cammino si possa effettuare, rimane il problema di come si possa organizzare tale cammino. A tal fine io uso la seguente regola: si supponga di eliminare coppie di ponti che colleghino le medesime zone, con tale convenzione il numero dei ponti si riduce notevolmente; allora risulta facilitata la richiesta di costruire lungo i ponti rimasti il cammino desiderato; e una volta che sia stato trovato, i ponti che si è supposto di eliminare non lo altereranno in modo significativo, il che risulta chiaro con una semplice riflessione; né penso sia il caso di dare ulteriori dettagli su come costruire i cammini.

Königsberg



Riferimenti

- Eulero, *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis*, pubblicato per la prima volta nel 1741 nei *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 8, pagg. 128-140.
- Giorgio Mainini, *Il problema dei ponti di Königsberg: soluzione di Euler*
- Beniamino Abis, *I Sette Ponti di Königsberg*
- Domenico Lenzi, *Leonardo Eulero e i ponti di Königsberg -La nascita della teoria dei grafi*
- Desmatron, *Teoria dei grafi*
- Sito del Cfr di Tor Vergata, Progetto Lauree scientifiche - *Modulo Grafi e reti*
- www.fotomat.es , porque la vida esta llena de mates